Definice. Definujeme $d = \gcd(a, b)$ jako největší takové číslo, pro které platí $d \mid a$ a zároveň $d \mid b$.

Příklad 1 (Relace podobojí).
Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je zároveň symetrická i antisymetrická. Kolik takových relací existuje?

Příklad 2 (Relace podžádnou).
Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

Příklad 3 (Jaké mají vlastnosti?).
Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní nebo antisymetrické:

(a) Relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ na množině $\{1, 2, 3\}$

(b) Relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ na množině $\{1, 2, 3\}$

(c) Relace $\leq$ na množině $\mathbb{N}$

(d) Relace $R = \{(x, y) : \gcd(x, y) = 1\}$ na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Příklad 4 (Kolik jich je?).
Určete, kolik je na n-prvkové množině relací:

(a) všech možných

(b) reflexivních

(c) symetrických

(d) antisymetrických

Příklad 5 (Prostá $\times$ na).
Dokaže, že máme-li konečnou množinu A, tak je funkce $f : A \to A$ prostá, právě tehdy když je na. Platí to i pro nekonečnou A?

Příklad 6 (Složená relace).
Jak vypadá relace $R \circ R$, je-li R definovaná jako:

(a) relace $=$ na $\mathbb{N}$

(b) relace $\leq$ na $\mathbb{N}$

(c) relace $<$ na $\mathbb{N}$

(d) relace $<$ na $\mathbb{R}$

Příklad 7 (Nekomutativita skládání).
Najděte relace R, S na libovolné množině X takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 8 (Zachovávání vlastností).
Nechť X je konečná množina a R, S jsou relace na této množině.
Rozhodněte, zda pro $V \in \{\text{reflexivní}, \text{symetrická}, \text{antisymetrická}, \text{tranzitivní}\}$ a pro $\square \in \{\cap, \cup, \setminus, \circ\}$ platí: „Když mají R i S vlastnost V, tak nutně i $R \square S$ má vlastnost V.“.

Příklad 9 (Skládání funkcí).
Rozhodněte o funkcích $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ pro libovolné množiny X, Y, Z:

(a) Jsou-li f, g prosté funkce, musí nutně i $g \circ f$ být prostá?

(b) Jsou-li f, g funkce na, musí nutně i $g \circ f$ být na?

(c) Je-li $g \circ f$ prostá, musí být f nebo g prostá?

(d) Je-li $g \circ f$ na, musí být f nebo g na?