**Definice.** Doplněk grafu $G = (V, E)$ je $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$, tedy graf, který má přesně opačné hrany.

**Definice.** Mějme graf $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$. Posloupnost $(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n))$ nazveme *skóre* grafu $G$.

**Příklad 1 (Odhalujeme kamufláž).**
Uvažujme „standardní“ grafy $K_n$, $P_n$, $C_n$ a $K_{m,n}$ z přednášky. Které z nich jsou izomorfní?

**Příklad 2 (Já a já se perfektně doplňujeme).**
Najděte nějaký graf, který je izomorfní svému doplňku. Co musí platit pro jeho počet vrcholů a hran?

**Příklad 3 (Tudy most nevede).**
Dokažte, že graf $G$, jehož každý vrchol má sudý stupeň, neobsahuje most. Jako most považujeme hranu $e$ takovou, že $G - e$ má více komponent souvislosti než $G$.

**Příklad 4 (Stejné skóre není vše).**
Najděte dvojici neizomorfních grafů, jež mají stejné skóre:

a) libovolnou,

b) kde oba grafy jsou souvislé,

c) a navíc mají co nejmenší počet vrcholů.

**Příklad 5 (Někdy skóre není nic).**
Rozhodněte, zda existuje graf, jehož skóre je:

a) $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

b) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$

c) $(0, 1, 2, 3, \ldots, n-1)$

**Příklad 6 (Cesta tam a zase zpátky).**
Nechť $G$ je souvislý graf, který neobsahuje žádný cyklus a $u, v$ dva jeho vrcholy, které nejsou spojené hranou. Ukažte, že $G + \{u, v\}$ již cyklus obsahovat bude.

**Příklad 7 (Skóre z jedniček či dvojek).**
Jak vypadají grafy, které obsahují jen vrcholy stupně:

a) 1,

b) 2,

c) 1 nebo 2.

**Příklad 8 (Doplněk nesouvislého).**
Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý (ale opačně to obecně neplatí).

**Příklad 9 (Bipartitní grafy).**
Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnici liché délky.

**Příklad 10 (Nedokonalý izomorfismus).**
Připomeňme si definici izomorfismu:

$$G \cong H \iff (\exists f : G \to H \text{ bijekce} : \forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(G)).$$

Co se stane, když:

a) místo bijekce vyžadujeme jen prostou funkci?

b) místo bijekce si vystačíme s jakoukoliv funkcí?

c) místo druhé ekvivalence uvažujeme implikaci?